www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

Université d'Orléans

ECOLE SUPERIEURE DE L'ENERGIE ET DES MATERIAUX

CONCOURS 1989 - Option DUT, GMP et GTE

MATHEMATIQUES (Durée 4 h - Coefficient 4)

Ce sujet comporte trois parties rigoureusement indépendantes. Le soin apporté à la rigueur du raisonnement et à la présentation sera un élément important d'appréciation.

PREMIERE PARTIE

Dans cette partie "exp" et "ln" désignent respectivement la fonction exponentielle de base e et la fonction logarithme népérien.

1°) En étudiant succinctement la fonction h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par $h(t) = \exp(t) - t - 1$, démontrer que pour tout t réel non nul, on a :

$$\exp(t) > 1 + t.$$

En déduire que pour tout réel x élément de $]1,+\infty[$ on a : $\exp\left(\frac{1}{1-x}\right) < \frac{x-1}{x}$

2°) Etudier la fonction g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = \exp\left(\frac{1}{1-x}\right) - \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$

Construire sa courbe représentative (C) et préciser la position de (C) par rapport à la droite d'équation $y = 1$ (au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$).

3°) Calculer les primitives de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle $[1,+\infty[$.

$$A : x \longmapsto A(x) = \frac{2-x}{(x-1)^3} \exp\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

$$B : x \longmapsto B(x) = [x(x-1)^2]^{-1}$$

$$C : x \longmapsto C(x) = (x-1)^{-2} \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

4°) Intégrer l'équation différentielle (E) suivante :

$$x(x-1)^2 y' - x(x-1)\, y = x(2-x) \exp\left(\frac{1}{1-x}\right) - (x-1) + x(x-1) \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$$

sur l'intervalle $]1,+\infty[$.

5°) Montrer que l'équation différentielle (E) admet une unique solution f telle que f(x) tende vers une limite finie L lorsque x tend vers $+\infty$. Préciser f et L.

6°) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution x_0 dans $\mathbb{R}$. Déterminer une valeur approchée de x_0 à 10^{-3} près par une méthode à justifier.

Tournez la page S.V.P.

DEUXIEME PARTIE

Dans l'ensemble C des nombres complexes, on définit une nouvelle opération interne, notée $*$, par :

Si $z = x+iy$ et $z' = x'+iy'$ alors $z * z' = xx' + i(xy' + yx')$

On admettra que l'opération $*$ est commutative, associative et distributive par rapport à l'addition et que 1 est l'élément neutre de $*$.

1°) Montrer que pour tout complexe z et z' : $\overline{z * z'} = \overline{z} * \overline{z'}$.

($\overline{z}$ désigne le complexe conjugué de z).

2°) Soit z_0 un nombre complexe : $z_0 = a_0 + ib_0$

Déterminer l'ensemble C' des complexes z_0 pour lesquels l'équation $z_0 * z = 1$, d'inconnue z, admet une solution unique.

Exprimer cette solution en fonction de z_0.

3°) On considère l'équation E_θ :

$$z*z + 2\sqrt{2}e^{i\theta}*z + 1 + 2i \sin 2\theta = 0,$$

où z est l'inconnue complexe et θ un paramètre réel de l'intervalle $[0,\pi[$.

Résoudre et discuter, suivant les valeurs du paramètre θ, l'équation E_θ.

TROISIEME PARTIE

Le plan euclidien est rapporté au repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Soit $\mathcal{C}$ la courbe d'équation polaire :

$$\rho = -\frac{(1+\cos\theta)}{\sin\theta}$$

définie par rapport au pôle O et à l'axe polaire origine $(O,\vec{u})$.

1°) Etudier la courbe $\mathcal{C}$ en précisant, en particulier :

- sa symétrie,
- sa position par rapport à son asymptote,
- ses tangentes au point double.

Construire la courbe $\mathcal{C}$.

2°) Déterminer une représentation paramétrique de la courbe $\mathcal{C}$ dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$.

3°) Montrer que toute droite D_k passant par O, de coefficient directeur k, coupe $\mathcal{C}$ en deux points distincts M_1 et M_2.

Montrer que l'ordonnée du milieu I de $[M_1M_2]$ est indépendante de k.

4°) Quelle est l'image de $\mathcal{C}$ par l'inversion de centre O et de rapport 1 ?

5°) Calculer l'aire du domaine-plan limité par la boucle de la courbe $\mathcal{C}$.

PETIT JEU :

dans ce recueil qui est premier au Hit Parade des polynomes ?

BERNOULLI

LAGRANGE

LEGENDRE

HERMITE

BERNSTEIN

TCHEBYCHEV

JACOBI

LAGUERRE .... ?

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail